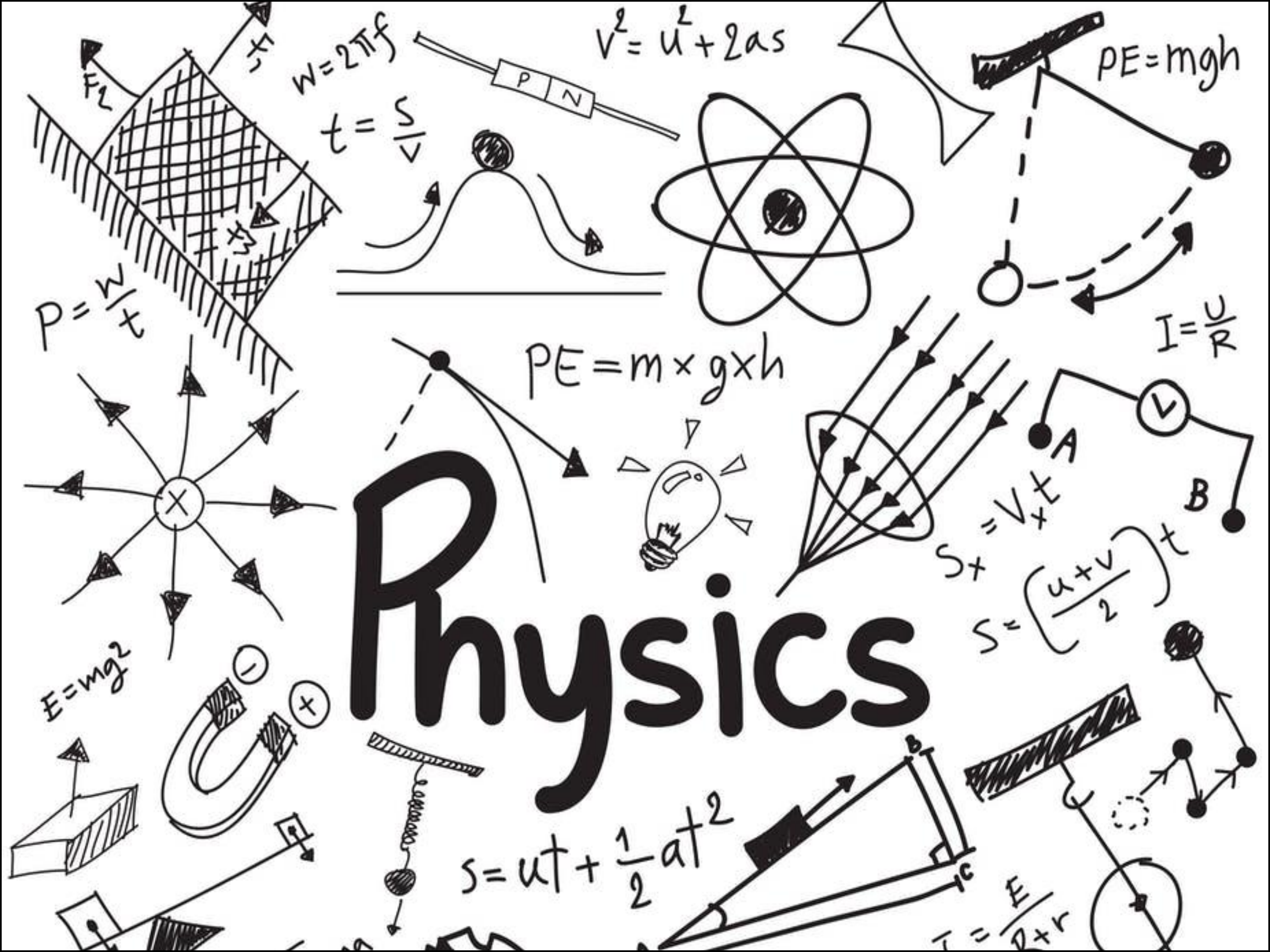

Physics
W=2πf
V²=u²+2as
PE=mgh
t=S/V
P N
P=W/t
PE=m×g×h
I=U/R
A
B
S=Vₓt
S=(u+v/2)t
E=mg²
s=ut+½at²
B
C
I=E/R+r

Reminder…

- **Διαλέξεις**
  - **Προαιρετική** παρουσία!
  - Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε
  - Δεν υπάρχουν απουσίες
  - Υπάρχει <u>**σεβασμός**</u> στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία
  - **Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας**: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά

Φυσική για Μηχανικούς

Στάσιμα Κύματα

Εικόνα: O Carlos Santana εκμεταλλεύεται τα στάσιμα κύματα στις χορδές του. Αλλάζει νότα στην κιθάρα του πιέζοντας τις χορδές σε διαφορετικά σημεία, μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας το μήκος του τμήματος της χορδής που ταλαντώνεται.

Εικόνα: Ο Carlos Santana εκμεταλλεύεται τα στάσιμα κύματα στις χορδές του. Αλλάζει νότα στην κιθάρα του πιέζοντας τις χορδές σε διαφορετικά σημεία, μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας το μήκος του τμήματος της χορδής που ταλαντώνεται.

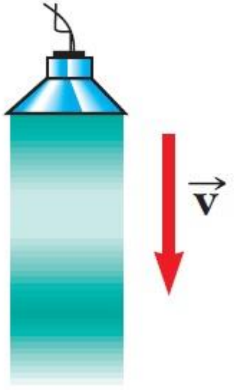
Φυσική για Μηχανικούς

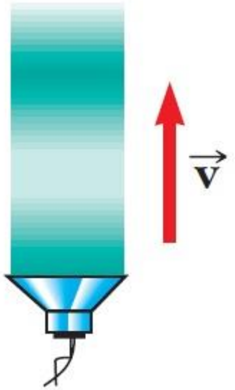
Στάσιμα Κύματα

Στάσιμα Κύματα

$$\sin\theta \pm \sin\varphi = 2\sin\left(\frac{\theta \pm \varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta \mp \varphi}{2}\right)$$

- **Στάσιμα κύματα**
  - Ως τώρα βλέπαμε ηχητικά κύματα που συνέβαλαν σε κάποιο σημείο μπροστά τους
  - Τι θα γίνει αν τα βάλουμε **αντικρυστά**;
    - **Ίδια** συχνότητα, μήκος κύματος, πλάτος, αρχ. φάση
    - **Αντίθετη** ταχύτητα
  - $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$
    $= A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx + \omega t)$
    $= (2A\sin(kx))\cos(\omega t)$
  - Η παραπάνω σχέση ορίζει ένα ***στάσιμο κύμα***

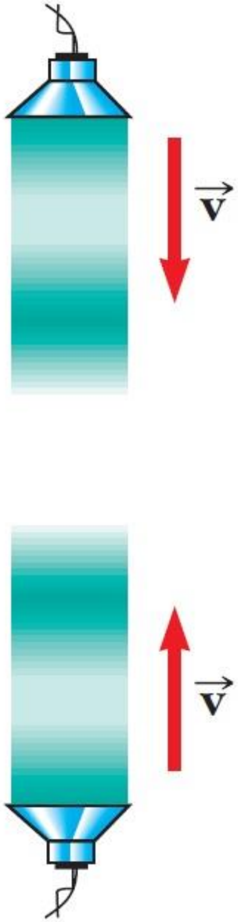




Στάσιμα Κύματα

- **Στάσιμα κύματα**

$$y(x,t) = (2A\sin(kx))\cos(\omega t)$$



- Παρατηρήστε ότι **δεν** εξαρτάται από την έκφραση $kx \pm \omega t$

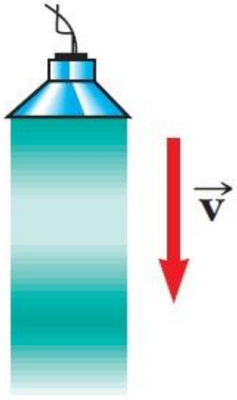
- Άρα **δεν** είναι οδεύον (κινούμενο) κύμα

- Δεν υπάρχει η έννοια της διάδοσης της κίνησης σε ένα **στάσιμο** κύμα

Στάσιμα Κύματα

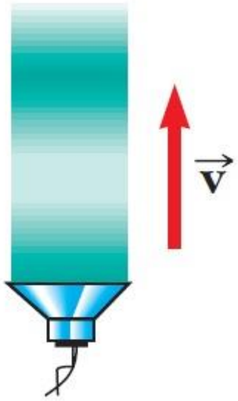
- **Στάσιμα κύματα**

$$y(x,t) = (2A\sin(kx))\cos(\omega t)$$



- Λέγεται **στάσιμο** (δηλαδή σταθερό σε μια θέση) επειδή όλα τα στοιχεία του μέσου εκτελούν μεν απλή αρμονική ταλάντωση, ΑΛΛΑ:
  - με **διαφορετικό πλάτος** το **καθένα**!

- Δηλ. αντίθετα με ότι συμβαίνει σε ένα οδεύον κύμα, όπου τα στοιχεία του μέσου εκτελούν το ένα μετά το άλλο την **ίδια ακριβώς κίνηση**…
  - … εξασφαλίζοντας έτσι τη διάδοση της διαταραχής (του κύματος)



Στάσιμα Κύματα

- **Στάσιμα κύματα**
- Ας συγκρίνουμε:

$$y(t) = A\cos(\omega t)$$

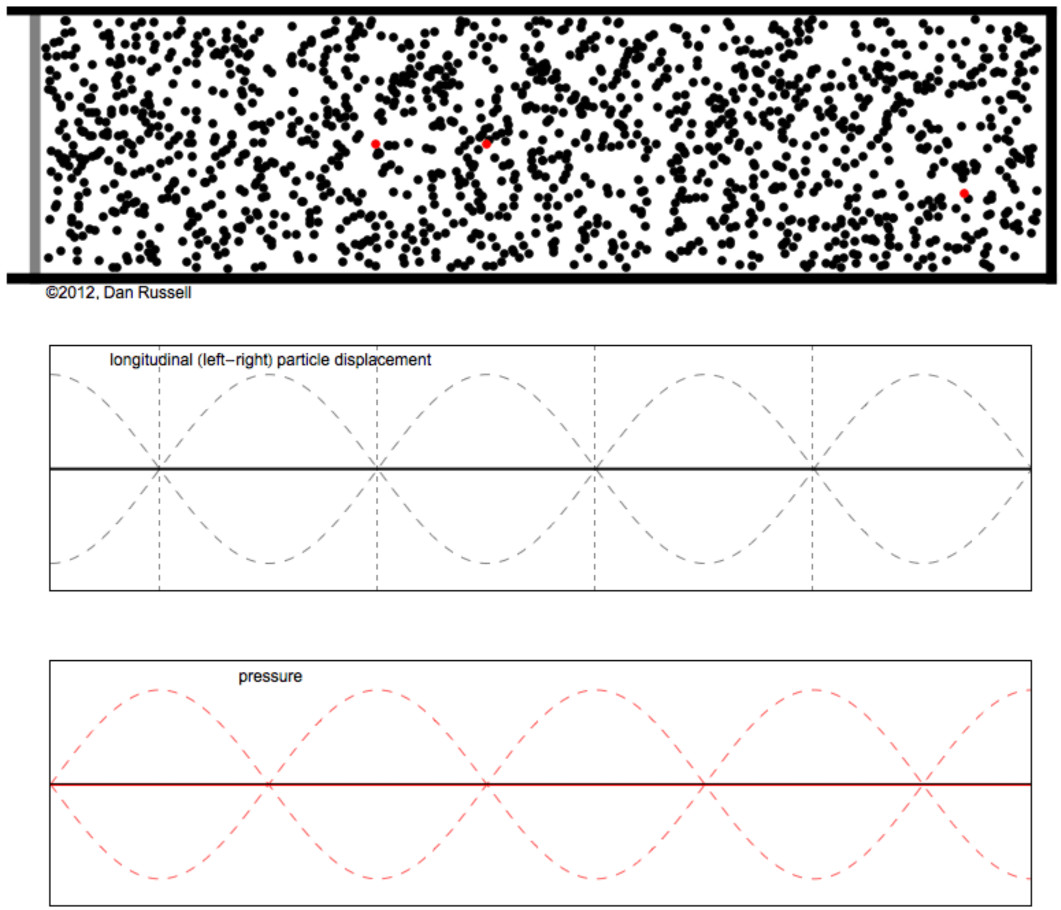
και

$$y(x,t) = (2A\sin(kx))\cos(\omega t)$$

- Τι παρατηρείτε;
  - Η δεύτερη περιγράφει μια ειδική μορφή της πρώτης
    - Κάθε στοιχείο που βρίσκεται στη **θέση** x εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση
    - Το **πλάτος** της απλής αρμονικής κίνησης, $2A\sin(kx)$, ενός στοιχείου εξαρτάται από τη **θέση** του στοιχείου, x, στο μέσο

Στάσιμα Κύματα

- **Στάσιμα κύματα**

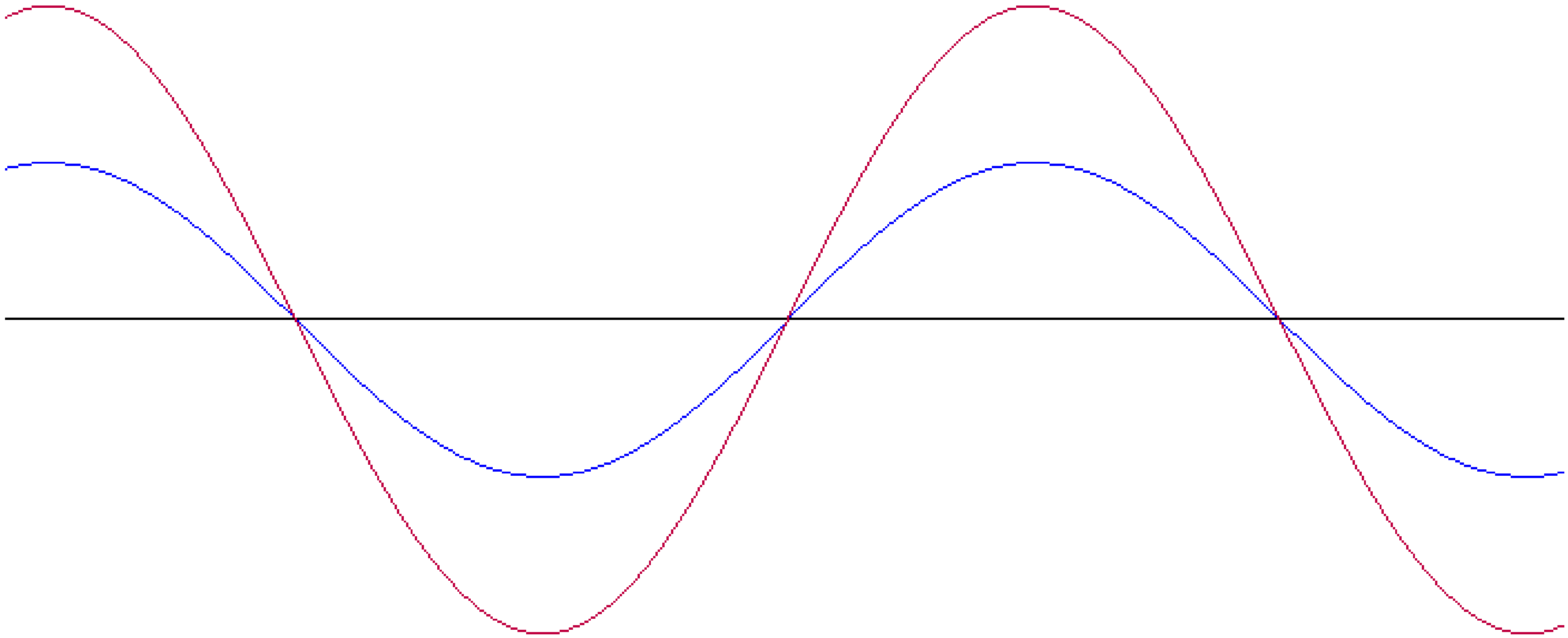


Μετατόπιση

Πίεση

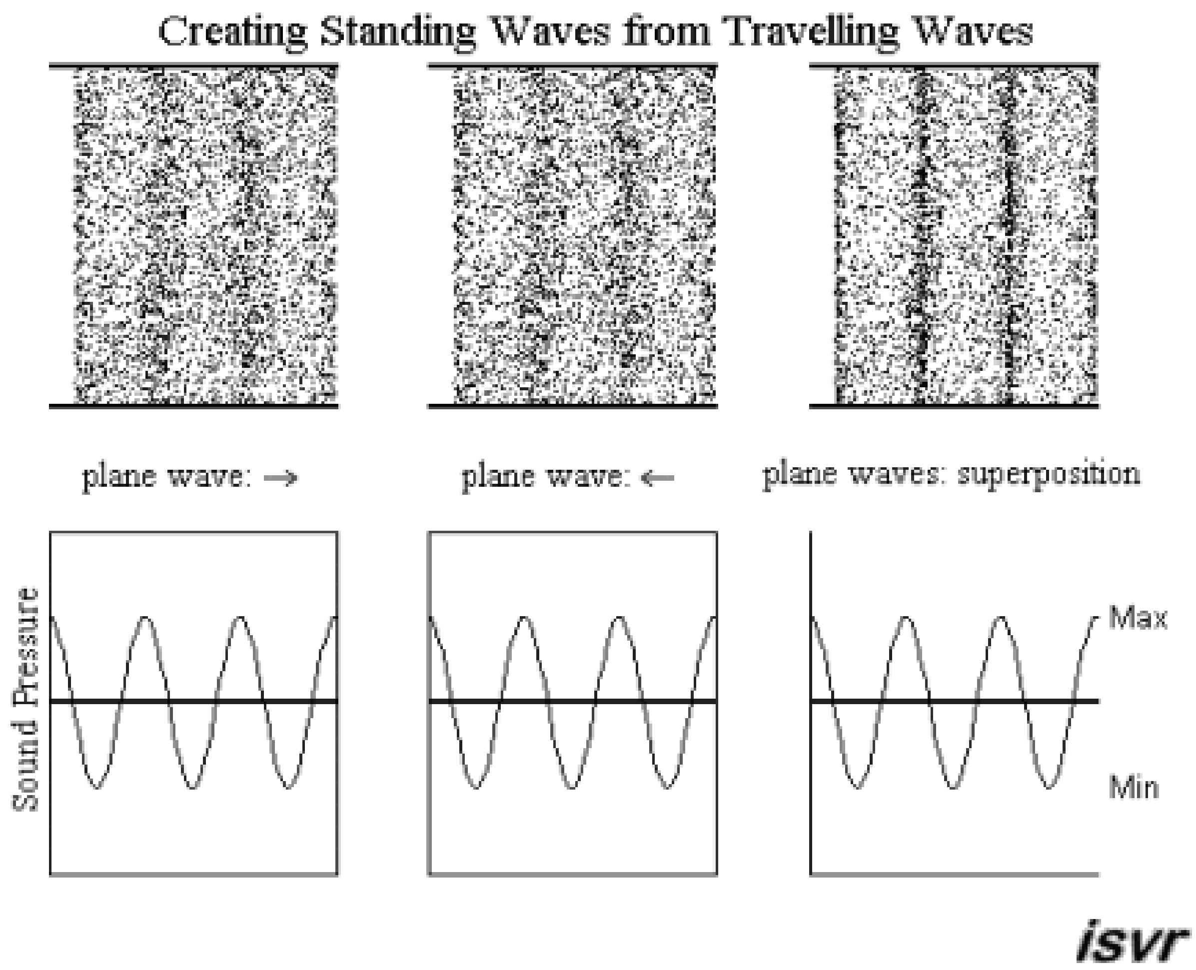
Στάσιμα Κύματα

- **Στάσιμα κύματα**



Στάσιμα Κύματα

- **Στάσιμα κύματα**



Στάσιμα Κύματα

- **Στάσιμα κύματα**

$$y(x,t) = (2A\sin(kx))\cos(\omega t)$$

- Υπάρχουν στοιχεία του μέσου που ΔΕΝ ταλαντώνονται? (δηλ. σε ποιο x μηδενίζεται το πλάτος;)

$$2A\sin(kx) = 0$$

$$\sin(kx) = \sin(n\pi)$$

$$kx = n\pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi$$

$$x = \frac{n\lambda}{2}, \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$

- Τα σημεία αυτά λέγονται **δεσμοί (nodes)**

Στάσιμα Κύματα

- **Στάσιμα κύματα**

$$y(x,t) = (2A\sin(kx))\cos(\omega t)$$

- Υπάρχον στοιχεία του μέσου που ταλαντώνονται με το μέγιστο δυνατό πλάτος? (δηλ. σε ποιο x μεγιστοποιείται το πλάτος;)

$$2A\sin(kx) = \pm 2A$$

$$\sin(kx) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$kx = n\pi + \frac{\pi}{2}$$

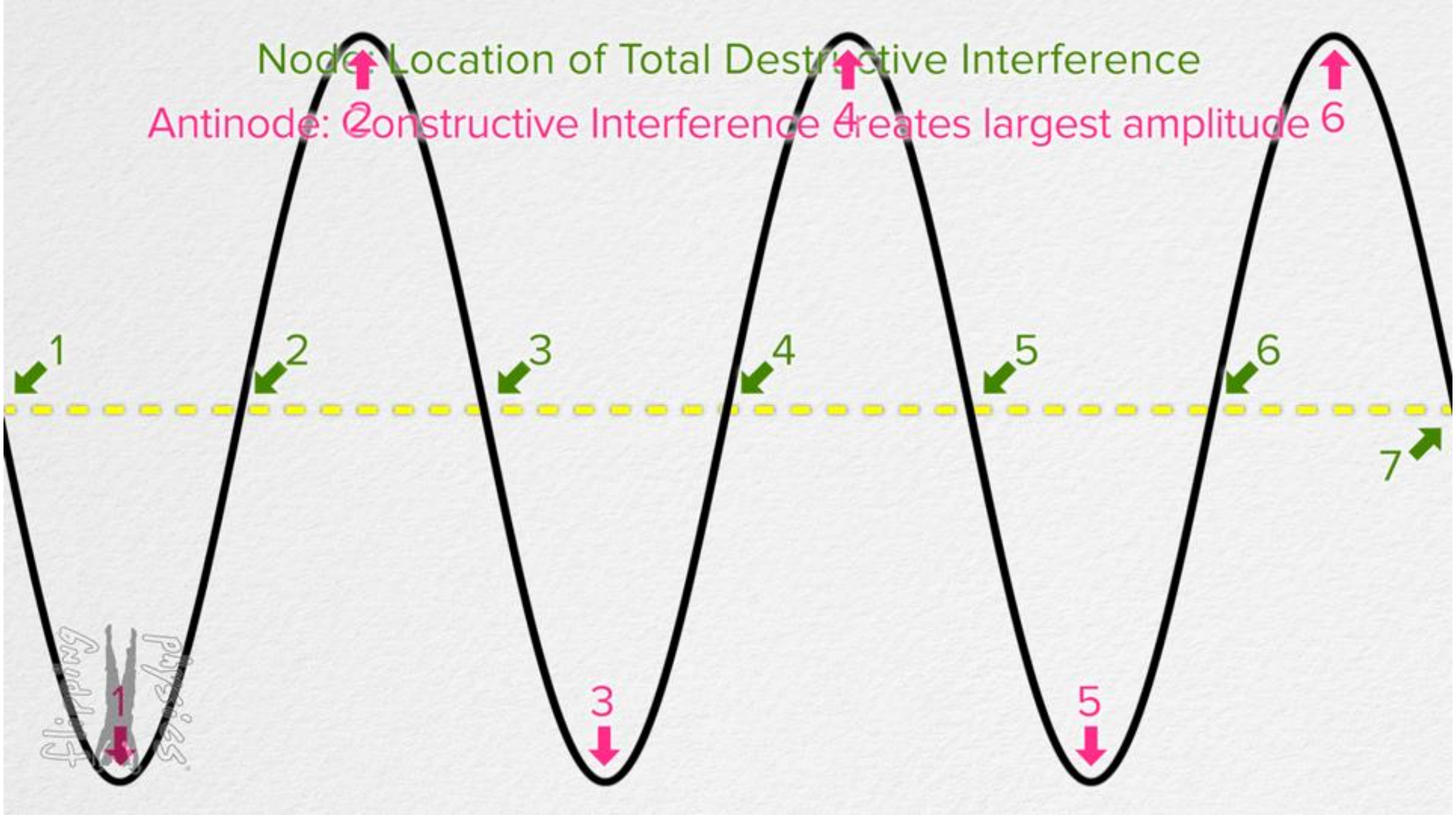
$$\frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{(2n+1)\lambda}{4}, n = 0,1,2,3,\ldots$$

- Τα σημεία αυτά λέγονται **κοιλίες (ή αντιδεσμοί) (antinodes)**

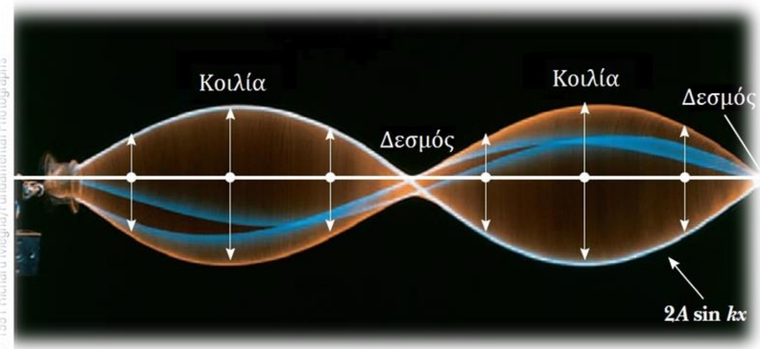
Στάσιμα Κύματα

- **Στάσιμα κύματα**



Στάσιμα Κύματα

- **Στάσιμα κύματα**



- Άρα εύκολα συμπεραίνει κανείς από τα προηγούμενα:

- Απόσταση μεταξύ **δυο διαδοχικών κοιλιών** = $\frac{\lambda}{2}$
- Απόσταση μεταξύ **δυο διαδοχικών δεσμών** = $\frac{\lambda}{2}$
- Απόσταση μεταξύ **δεσμού και επόμενης κοιλίας** = $\frac{\lambda}{4}$

Στάσιμα Κύματα

- **Παράδειγμα:**
  - Δυο κύματα τα οποία διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις, δημιουργούν ένα στάσιμο κύμα. Οι επιμέρους κυματοσυναρτήσεις είναι

$$y_1(x,t) = 4\sin(3x - 2t)$$
$$y_2(x,t) = 4\sin(3x + 2t)$$

με x, y να μετρούνται σε εκατοστά και ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

    - Α) Βρείτε το πλάτος της απλής αρμονικής κίνησης για το στοιχείο του μέσου που βρίσκεται στη θέση $x = 2.3$ εκατοστά.
    - Β) Βρείτε τις θέσεις των δεσμών και των κοιλιών αν το ένα άκρο της χορδής βρίσκεται στο σημείο $x = 0$.

Στάσιμα Κύματα

- **Παράδειγμα – Λύση:**
- Οι επιμέρους κυματοσυναρτήσεις είναι

$$y_1 = 4\sin(3x - 2t)$$
$$y_2 = 4\sin(3x + 2t)$$

  - Α) Βρείτε το πλάτος της απλής αρμονικής κίνησης για το στοιχείο του μέσου που βρίσκεται στη θέση $x = 2.3$ εκατοστά.

Γνωρίζουμε ήδη ότι το πλάτος του στάσιμου κύματος που θα δημιουργηθεί είναι

$$2A\sin(kx)$$

Έχουμε ότι $k = 3\ \frac{rad}{cm}$ και ότι $A = 4$ και άρα λοιπόν

$$2A\sin(kx) = 8\sin(3x)\Big|_{x=2.3} = 8\sin(6.9) \simeq 4.6\ cm$$

Στάσιμα Κύματα

- **Παράδειγμα – Λύση:**
- Οι επιμέρους κυματοσυναρτήσεις είναι

$$y_1 = 4\sin(\overset{k}{3}x - 2t)$$
$$y_2 = 4\sin(3x + 2t)$$

  - Β) Βρείτε τις θέσεις των δεσμών και των κοιλιών αν το ένα άκρο της χορδής βρίσκεται στο σημείο $x = 0$.

Ξέραμε ότι. $x_a = \frac{2n+1}{4}\lambda$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

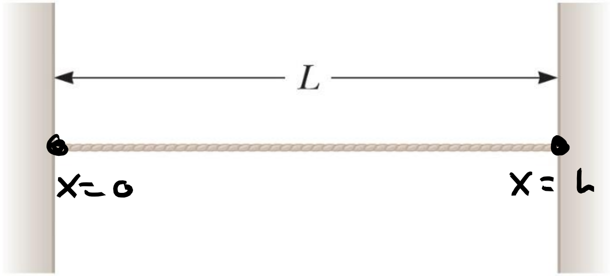
$x_\delta = \frac{n}{2}\lambda$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Είναι $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3}$ cm, οπότε

$x_a = \frac{2n+1}{4}\frac{2\pi}{3}$, $n = 0, 1, 2, \ldots = \frac{2n+1}{6}\pi$

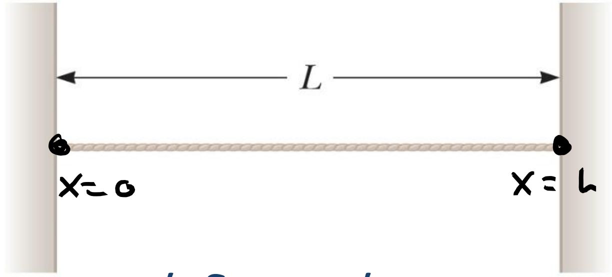
$x_\delta = \frac{n}{2}\frac{2\pi}{3}$, $n = 0, 1, 2, \ldots = \frac{\pi n}{3}$

Στάσιμα Κύματα



- **Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες**
  - Θεωρήστε το νήμα της εικόνας
    - Χορδή κιθάρας, πιάνου
  - *Οριακή συνθήκη*: το νήμα έχει υποχρεωτικά δεσμούς στα άκρα!
  - Αν διεγείρουμε το νήμα στο μέσο του, δυο ημιτονοειδή κύματα θα ταξιδέψουν προς αντίθετες κατευθύνσεις
  - Όταν φτάσουν στα άκρα του νήματος, θα ανακλαστούν με ίδιο πλάτος και συχνότητα, και θα συμβάλλουν μεταξύ τους
    - Κι αυτό συνεχίζεται για τα επόμενα ανακλώμενα και συμβαλλόμενα κύματα
  - Αυτές είναι οι συνθήκες για δημιουργία ενός στάσιμου κύματος!

Στάσιμα Κύματα



- **Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες**
  - <u>*Οριακή συνθήκη*</u>: το νήμα έχει υποχρεωτικά δεσμούς στα άκρα!
    - Άρα το μήκος κύματος των κυμάτων που δημιουργούν στάσιμο κύμα πάνω στο νήμα είναι προκαθορισμένο
    - $2A \sin kL = 0 \Rightarrow kL = \frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1,2,3,4, \ldots$
    - Προκαθορισμένη είναι και η συχνότητα του κύματος, αφού

$$u = \lambda f \Rightarrow f_n = \frac{u}{\lambda_n}$$

  - Η οριακή συνθήκη προκαλεί ένα συγκεκριμένο αριθμό διακριτών στάσιμων κυμάτων στο νήμα, που λέγονται **κανονικοί τρόποι** ή **ιδιομορφές (modes)**
    - Καθεμιά έχει τη δική της συχνότητα, η οποία υπολογίζεται εύκολα όπως παραπάνω

Στάσιμα Κύματα

- **Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες**
  - Κανονικός τρόπος (mode) $\boldsymbol{n}$
  - Περιγράφεται ως η ταλάντωση που έχει οριακές συνθήκες στα άκρα της (δεσμοί) και κάθε δεσμός απέχει ¼ του μήκους κύματος από τον επόμενο/προηγούμενο αντιδεσμό
  - Μήκη κύματος

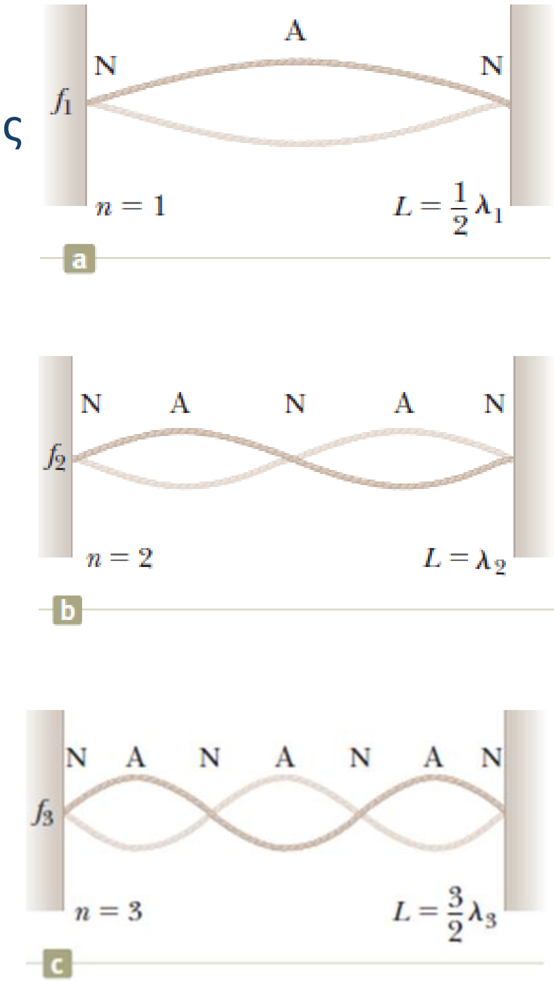
$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, n \in \mathbb{N}^+$$

  - Φυσικές συχνότητες

$$f_n = \frac{u}{\lambda_n} = n\frac{u}{2L} = nf_1, n \in \mathbb{N}^+$$

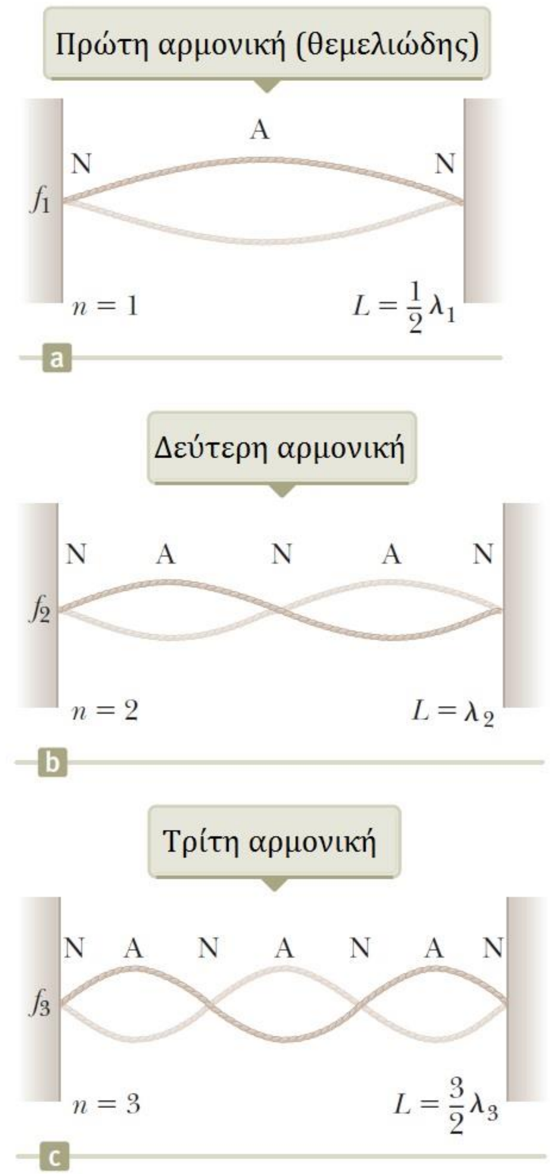
  - Για νήμα τάσης T και γραμμικής πυκνότητας μ,

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}, n \in \mathbb{N}^+$$



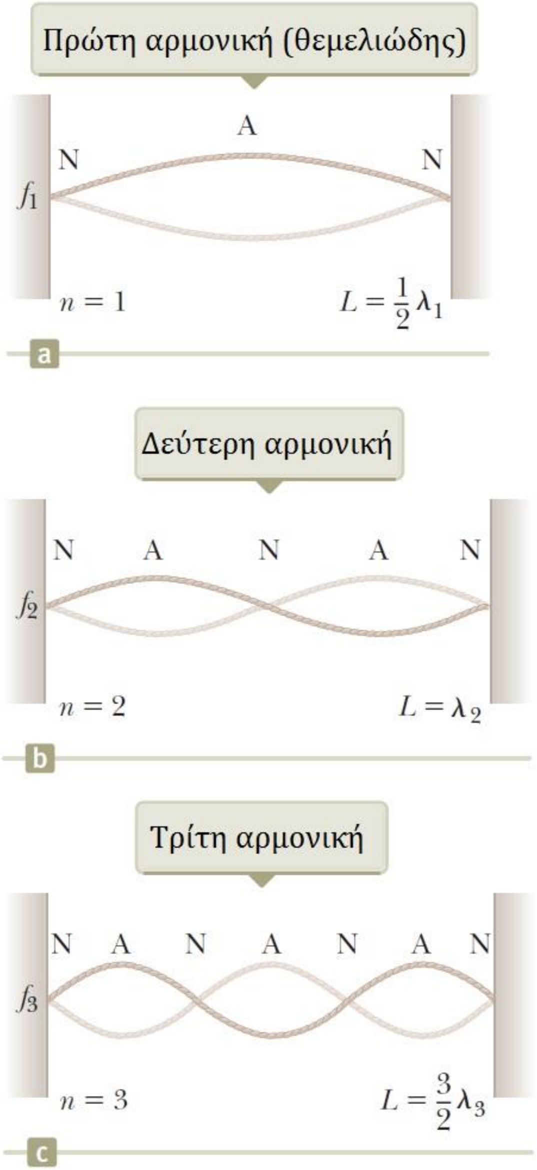
Στάσιμα Κύματα

- **Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες**
  - Κανονικές μορφές (modes) n
  - Για $n = 1$, η συχνότητα αυτή λέγεται ***θεμελιώδης συχνότητα***
    - Οι υπόλοιπες είναι ακέραιες πολλα-πλάσιες αυτής: $f_n = nf_1$
  - Συχνότητες κανονικών τρόπων που παρουσιάζουν αυτήν την ακέραια πολλαπλάσια σχέση δημιουργούν ταλαντώσεις που λέγονται ***αρμονικές***

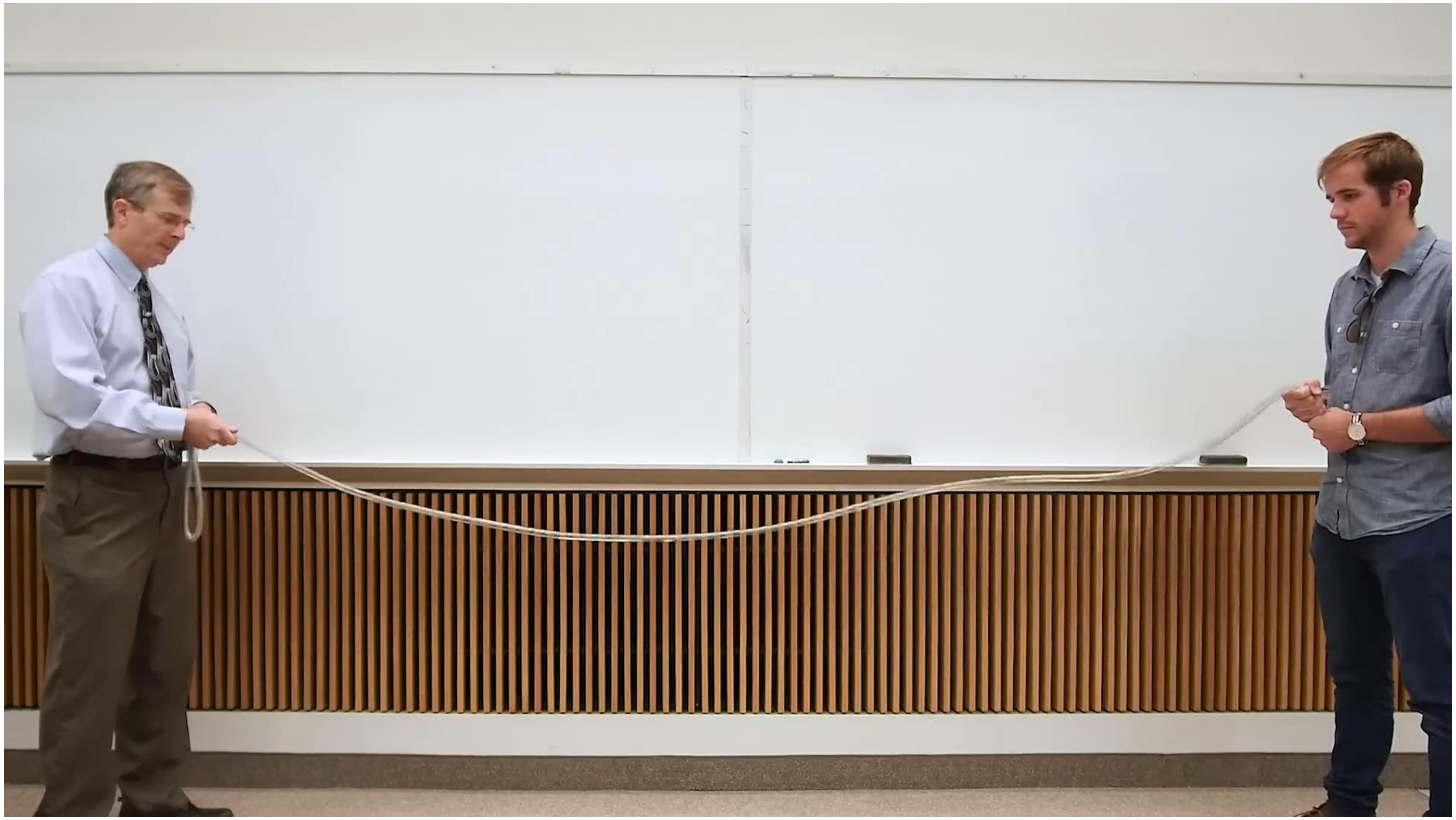


Στάσιμα Κύματα

- **Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες**
  - Για να παρουσιαστεί μια μόνο αρμονική, πρέπει να διεγείρουμε το νήμα ώστε να πάρει το σχήμα της επιθυμητής αρμονικής
    - Αφού το διεγείρουμε, το νήμα θα ταλαντωθεί στην αντίστοιχη συχνό-τητα
    - Δύσκολο να επιτευχθεί για τις περισ-σότερες αρμονικές
  - Αν διεγείρουμε το νήμα με τυχαίο τρόπο, μόνο κύματα που ικανοποι-ούν τις οριακές συνθήκες θα «επιζή-σουν» στο νήμα
    - Αυτά είναι οι αρμονικές ☺

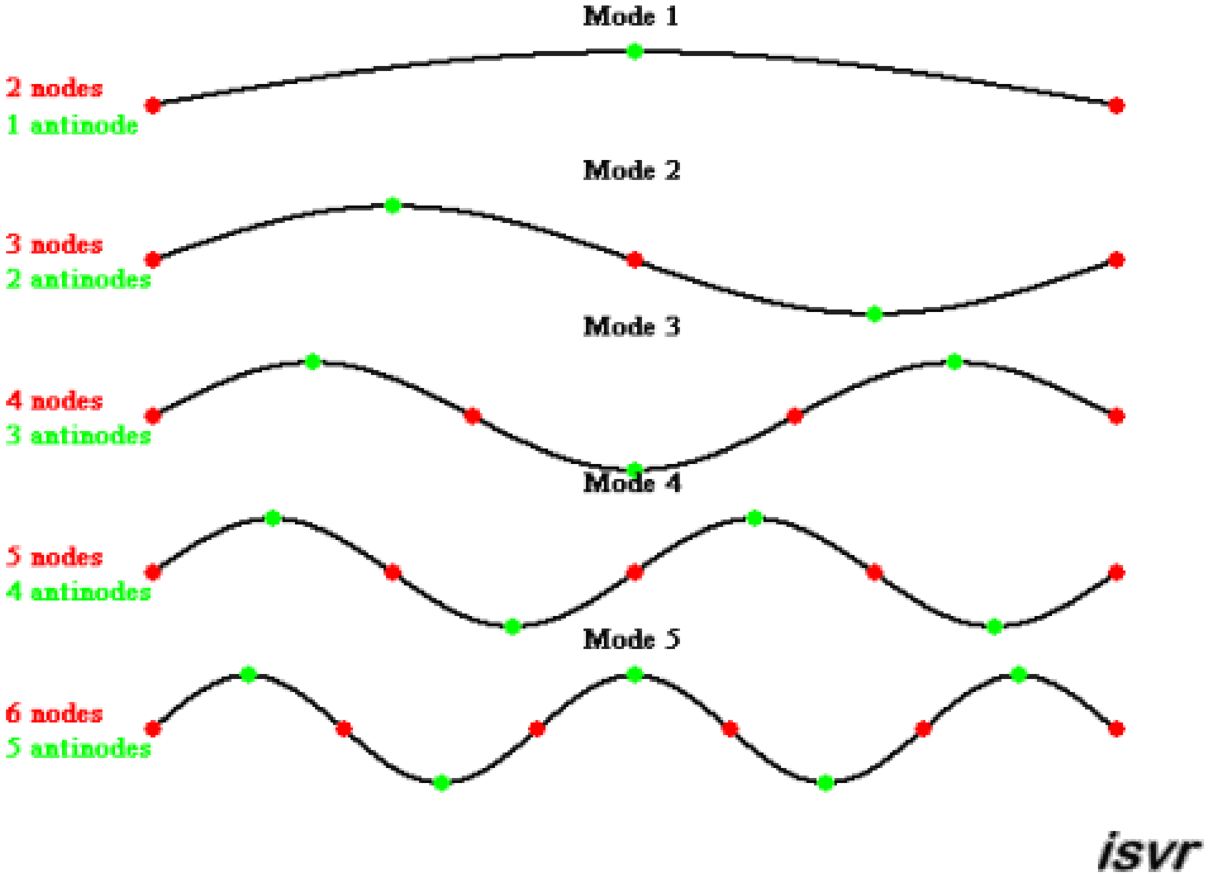


Στάσιμα Κύματα



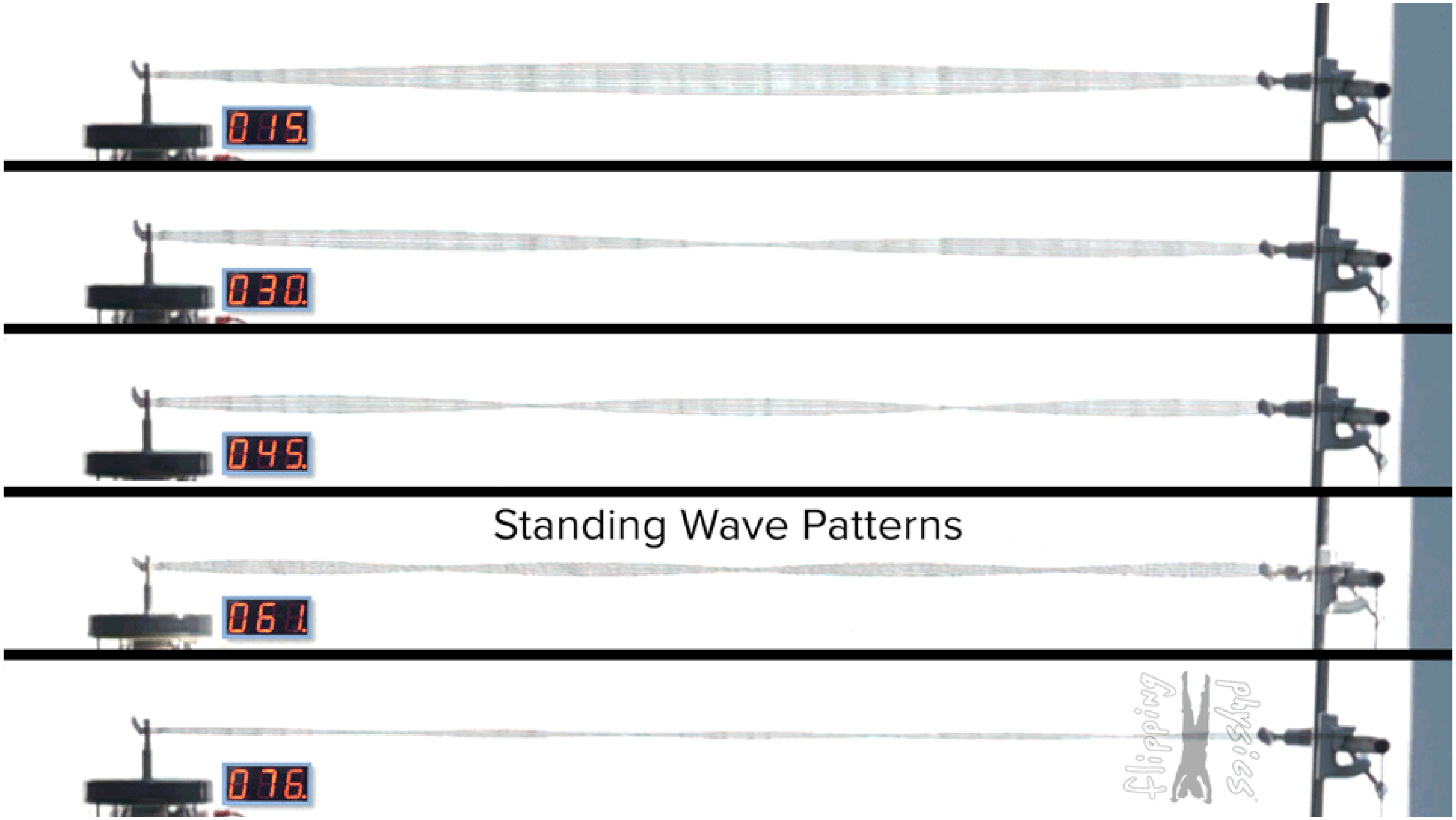
Στάσιμα Κύματα

- **Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες**
  - Κανονικές μορφές (modes) n



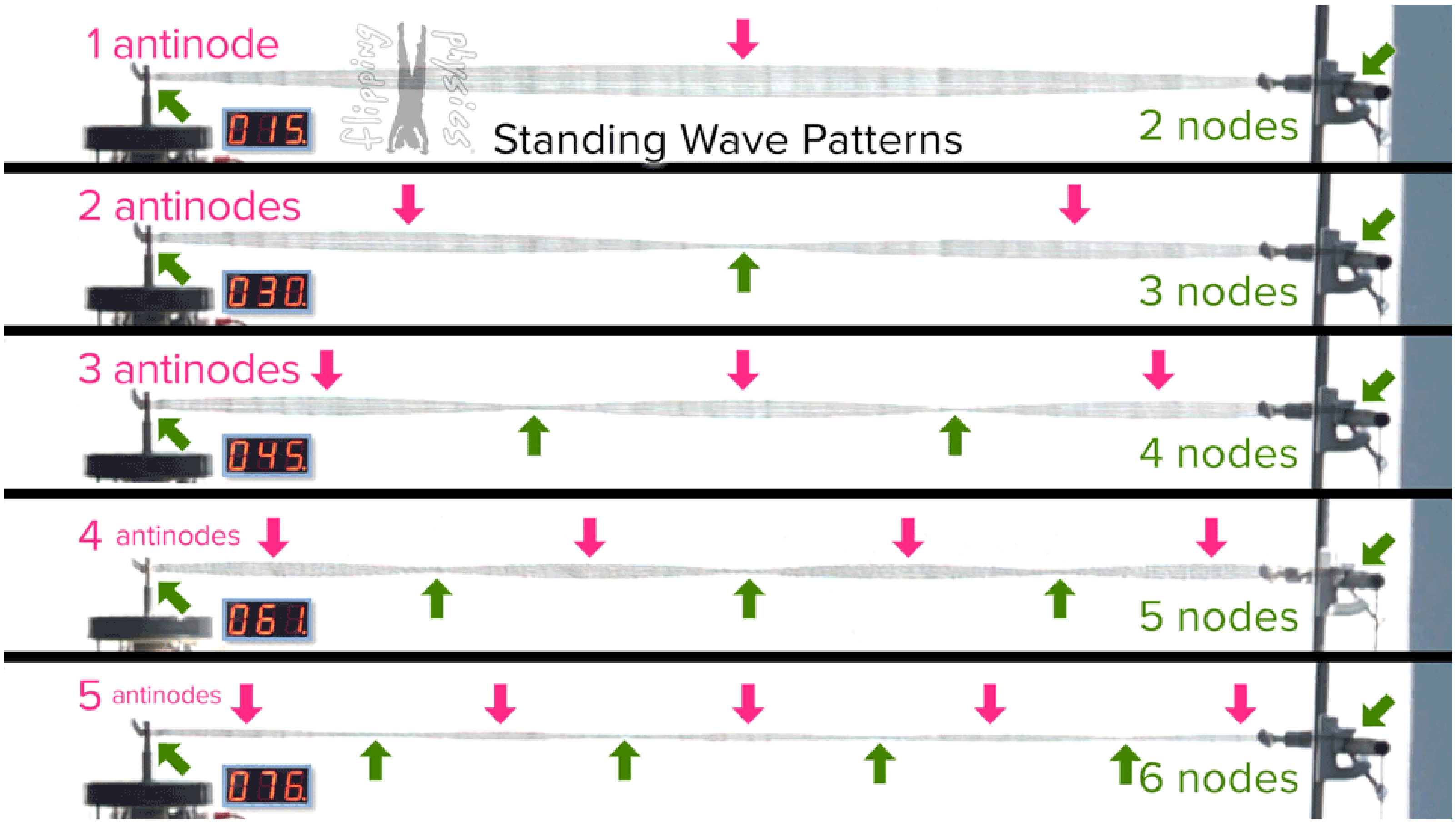
Στάσιμα Κύματα

- **Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες**
  - Κανονικές μορφές (modes) n



Στάσιμα Κύματα

- **Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες**
  - Κανονικές μορφές (modes) n



Τέλος Διάλεξης